

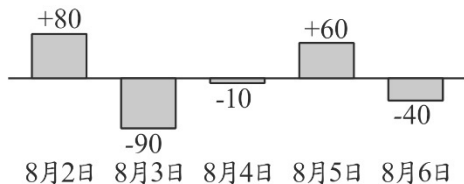
2024 第 26 屆 AMC 10 A

1. 試問 $101 \times 9901 - 99 \times 10101$ 之值為何？
(A) 2 (B) 20 (C) 21 (D) 200 (E) 2020
2. 我們可利用公式 $T = aL + bG$ 來估計沿著某路徑健行到山頂的時間，其中 a, b 是常數， T 是以分為單位的時間， L 是以公里為單位的路徑長度， G 是以公尺為單位的山頂高度。當路徑長為 1.5 公里且山頂高度為 800 公尺時，健行到山頂的時間需 69 分鐘；當路徑長為 1.2 公里且山頂高度為 1100 公尺時，也需相同的健行時間。試問當路徑長為 4.2 公里且山頂高度為 4000 公尺時，健行到山頂需要幾分鐘？
(A) 240 (B) 246 (C) 252 (D) 258 (E) 264
3. 若可以寫成五個相異質數和的最小質數為 n ，則 n 的各位數字和為多少？
(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 11
4. 將 2024 表示成一些二位數(不必相異)的和時，試問在表示法中最少需要用到多少個二位數？
(A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24
5. 已知三個整數的乘積為 60，且它們的和為正數，試問此三個整數的和之最小可能值為多少？
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 13
6. 滿足 $n!$ 是 2024 的倍數之最小正整數 n 為多少？
(A) 11 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 253
7. 試問最少要經過幾次將兩個相鄰的字母互換，才可以把 ABCDEF 換成 FEDCBA？
(例如：將 ABC 換成 CBA 最少要經過 3 次兩個相鄰字母的互換，其中一種換法為 $ABC \rightarrow BAC \rightarrow BCA \rightarrow CBA$)。
(A) 6 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 24

8. 將 6 位年輕者與 6 位年長者分成 3 隊。試問每隊有 2 位年輕者與 2 位年長者的分法有多少種？
(A) 720 (B) 1350 (C) 2700 (D) 3280 (E) 8100
9. 考慮下列的操作：給定一個正整數 n ，若 n 是 3 的倍數，就將 n 換成 $\frac{n}{3}$ ；若 n 不是 3 的倍數，就將 n 換成 $n+10$ ，接著持續這樣的操作。例如，一開始先給 $n=4$ ，則接著的操作會得到 $4 \rightarrow 14 \rightarrow 24 \rightarrow 8 \rightarrow 18 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 12 \rightarrow \dots$ 。若開始給 $n=100$ ，則經過 100 次操作後所得的數為何？
(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50
10. 小美、阿寶、小卡、大杜都在同一間巧克力工廠工作。小美、阿寶與小卡在下午 1:00 開始工作，他們每 3 分鐘分別能包裝 4、3、3 盒。過了一些時間，大杜也開始參加工作，且大杜每 4 分鐘能包裝 5 盒。若他們一起工作到下午 2:45 時剛好包裝完 450 盒，則大杜於下午何時開始參加工作？
(A) 1:25 (B) 1:35 (C) 1:45 (D) 1:55 (E) 2:05
11. 在坐標平面上，考慮下列四種變換：
- (1) 向右平移 2 單位，
 - (2) 以原點為中心逆時針旋轉 90° ，
 - (3) 對 x 軸鏡射，
 - (4) 以原點為中心刻度放大 2 倍。
- 如果第一種變換做完再做第二種變換的結果，與先做第二種變換後再做第一種變換的結果相同，就稱這兩種變換是**可交換**的一組。試問上述(1)~(4)的四種變換中，任取兩種變換所形成的 6 組中有幾組是**可交換**的？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
12. 試問有多少個整數序對 (m, n) 滿足 $\sqrt{n^2 - 49} = m$ ？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 無限多

13. 志達玩一種數學冒險遊戲，在8月1日他得到1700分，接著連續5天他都玩此遊戲。下面的長條圖顯示他每天得分與前一天得分的比較(例如，他8月2日得到 $1700+80=1780$ 分)。試問志達這6天得分的平均分數為何？

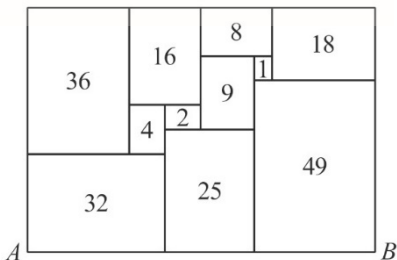
從8月2日到6日每天得分與前一天得分的比較



14. 設 M 是滿足 $M+1213$ 與 $M+3773$ 均為完全平方數的最大整數，試問 M 的個位數字為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 8

15. 下圖中各長方形都與它們共同組成的大長方形相似，若圖中的數都是表示所在長方形的面積，則 \overline{AB} 之長為何？



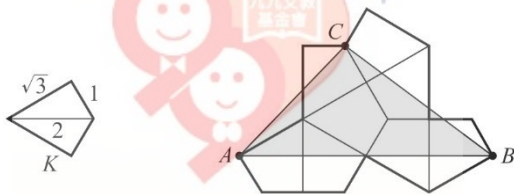
(A) $4+4\sqrt{5}$ (B) $10\sqrt{2}$ (C) $5+5\sqrt{5}$
 (D) $10\sqrt[4]{8}$ (E) 20

16. 有一邊落在直線 ℓ 上的正三角形，其高為 24；有一個半徑為 12 的圓與直線 ℓ 相切，且外切於此正三角形。若介於正三角形外、圓外與直線 ℓ 之間的封閉區域所圍面積可以表示為 $a\sqrt{b}-c\pi$ ，其中 a, b, c 為正整數，且 b 不能被任何質數的平方所整除，則 $a+b+c$ 之值為何？
 (A) 72 (B) 73 (C) 74 (D) 75 (E) 76
17. 若等比數列的前三項為整數 $a, 720, b$ ，其中 $a < 720 < b$ ，則 b 的最小可能值之各位數字和為多少？
 (A) 9 (B) 12 (C) 16 (D) 18 (E) 21
18. A、B 兩隊在至多三場的決賽中，比賽採取三戰兩勝制，先贏得兩場的隊伍**獲勝**。第一場是在 A 隊的主場比賽，剩下場次是在 B 隊的主場比賽。已知在 A 隊的主場比賽時，A 隊贏的機率為 $\frac{2}{3}$ ，在 B 隊的主場比賽時，A 隊每場贏的機率為 p ，每場比賽的結果是獨立的。如果最後 A 隊獲勝的機率為 $\frac{1}{2}$ ，則 p 可以表示為 $\frac{1}{2}(m-\sqrt{n})$ ，其中 m, n 為正整數。試問 $m+n$ 之值為何？
 (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14
19. 若滿足「 b 進位制整數 2024_b 能被 16 整除(此處 16 是 10 進位制)且 $5 \leq b \leq 2024$ 」的正整數 b 有 K 個，試問 K 的各位數字和為多少？
 註： b 進位制整數 $2024_b = 2 \times b^3 + 0 \times b^2 + 2 \times b + 4$ 。
 (A) 16 (B) 17 (C) 18 (D) 20 (E) 21

20. 在一個 5×5 的整數矩陣中，每個位置的數均稱為元，且每一列與每一行均依序形成一個有 5 項的等差數列。若位於第 $(5,5)$ 、 $(2,4)$ 、 $(4,3)$ 和 $(3,1)$ 的各元分別為 0、48、16 和 12，則位於第 $(1,2)$ 的元為何？

$$\begin{bmatrix} \cdot & ? & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 48 & \cdot \\ 12 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 16 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

- (A) 19 (B) 24 (C) 29 (D) 34 (E) 39
21. 設 K 是由兩股長分別為 1 與 $\sqrt{3}$ ，且共用斜邊的兩個直角三角形所形成的箏形（如下左圖）；再將八個 K 合成一個多邊形（如下右圖）。試問圖中 $\triangle ABC$ 的面積為多少？



- (A) $2+3\sqrt{3}$ (B) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ (C) $\frac{10+8\sqrt{3}}{3}$ (D) 8 (E) $5\sqrt{3}$
22. 設 S 是 $\{1, 2, 3, \dots, 2024\}$ 的一個子集合且滿足下列兩個條件：

- (1) 若 x, y 是 S 中相異的元素，則 $|x-y| > 2$ 。
- (2) 若 x, y 是 S 中相異的奇數元素，則 $|x-y| > 6$ 。

試問 S 中的元素最多有多少個？

- (A) 436 (B) 506 (C) 608 (D) 654 (E) 675

23. 若整數 a 、 b 和 c 滿足 $ab+c=100$ 、 $bc+a=87$ 及 $ca+b=60$ ，則 $ab+bc+ca$ 之值為何？
 (A) 212 (B) 247 (C) 258 (D) 276 (E) 284

24. 一隻蜜蜂在坐標空間中移動。投擲一個公正的骰子，它的六個面分別標註為 A^+ 、 A^- 、 B^+ 、 B^- 、 C^+ 、 C^- 。若蜜蜂在 (a, b, c) 的位置，當投擲骰子出現 A^+ ，則蜜蜂直線移到 $(a+1, b, c)$ 的位置；當投擲骰子出現 A^- ，則蜜蜂直線移到 $(a-1, b, c)$ 的位置。對於其他四種投擲情形，蜜蜂也做相對應的直線移動。設蜜蜂一開始在 $(0, 0, 0)$ 的位置，並投擲骰子四次。試問蜜蜂恰好經過某單位正立方體的四條相異稜線之機率為何？

- (A) $\frac{1}{54}$ (B) $\frac{7}{54}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{5}{18}$ (E) $\frac{2}{5}$

25. 下圖包含邊長為 1 吋的 $3 \times 8 = 24$ 個虛線邊正方形。小卡用一些一吋長的牙籤放在某些正方形的邊上，形成一個不交叉的封閉曲線。下圖各格中的數字表示該正方形被牙籤覆蓋的邊數，沒有數字的正方形被牙籤覆蓋的邊數可以是任意的。試問小卡有多少種方法可以放置牙籤？

1	1	1	1	1	1	1	1	1

- (A) 130 (B) 144 (C) 146 (D) 162 (E) 196