

## 2024 第 76 屆 AMC 12 A

1. 試問  $101 \times 9901 - 99 \times 10101$  之值為何？  
 (A) 2 (B) 20 (C) 21 (D) 200 (E) 2020
2. 我們可利用公式  $T = aL + bG$  來估計沿著某路徑健行到山頂的時間，其中  $a, b$  是常數， $T$  是以分為單位的時間， $L$  是以公里為單位的路徑長度， $G$  是以公尺為單位的山頂高度。當路徑長為 1.5 公里且山頂高度為 800 公尺時，健行到山頂的時間需 69 分鐘；當路徑長為 1.2 公里且山頂高度為 1100 公尺時，也需相同的健行時間。試問當路徑長為 4.2 公里且山頂高度為 4000 公尺時，健行到山頂需要幾分鐘？  
 (A) 240 (B) 246 (C) 252 (D) 258 (E) 264
3. 將 2024 表示成一些二位數(不必相異)的和時，試問在表示法中最少需要用到多少個二位數？  
 (A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24
4. 滿足  $n!$  是 2024 的倍數之最小正整數  $n$  為多少？  
 (A) 11 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 253
5. 在  $\Delta ABC$  中， $\angle ABC = 90^\circ$  且  $\overline{BA} = \overline{BC} = \sqrt{2}$ 。已知相異點  $P_1, P_2, \dots, P_{2024}$  依序在斜邊  $\overline{AC}$  上，且滿足  $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \dots = \overline{P_{2023}P_{2024}} = \overline{P_{2024}C}$ ，試問向量和  $\overrightarrow{BP_1} + \overrightarrow{BP_2} + \overrightarrow{BP_3} + \dots + \overrightarrow{BP_{2024}}$  的長度是多少？  
 (A) 1011 (B) 1012 (C) 2023 (D) 2024 (E) 2025

6. 某一組數據，含有 20 個數，其平均數為 45，且其中有些數值為 6。已知將所有數值為 6 的數刪除後，剩餘數之平均數為 66，試問原數據中數值為 6 的有多少個？  
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8
7. 已知三個整數的乘積為 60，且它們的和為正數，試問此三個整數的和之最小可能值為多少？  
 (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 13
8. 設  $M$  是滿足  $M+1213$  與  $M+3773$  均為完全平方數的最大整數，試問  $M$  的個位數字為何？  
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 8
9. 若三邊長為 3, 4, 5 的直角三角形中最小角的角度為  $\alpha$  弧度，而三邊長為 7, 24, 25 的直角三角形中最小角的角度為  $\beta$  弧度，則  $\beta$  可以表示成下列哪一個  $\alpha$  的關係式？  
 (A)  $\frac{\alpha}{3}$  (B)  $\alpha - \frac{\pi}{8}$  (C)  $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$  (D)  $\frac{\alpha}{2}$  (E)  $\pi - 4\alpha$
10. 滿足  $\log(\sin(3\theta)) + \log(\cos(2\theta)) = 0$  且  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  的  $\theta$  有多少個？  
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

11. 已知  $y = e^{x+1} + e^{-x} - 2$  的圖形有一條對稱軸，試問點  $(-1, \frac{1}{2})$  對此對稱軸的對稱點為何？  
 (A)  $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$  (B)  $(-1, 0)$  (C)  $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$   
 (D)  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  (E)  $\left(3, \frac{1}{2}\right)$

12. 若滿足「 $b$  進位制整數  $2024_b$  能被 16 整除(此處 16 是 10 進位制)且  $5 \leq b \leq 2024$ 」的正整數  $b$  有  $K$  個，試問  $K$  的各位數字和為多少？  
 註： $b$  進位制整數  $2024_b = 2 \times b^3 + 0 \times b^2 + 2 \times b + 4$ 。  
 (A) 16 (B) 17 (C) 18 (D) 20 (E) 21

13. 若等比數列的前三項為整數  $a, 720, b$ ，其中  $a < 720 < b$ ，則  $b$  的最小可能值之各位數字和為多少？  
 (A) 9 (B) 12 (C) 16 (D) 18 (E) 21

14. 若  $p, q, r$  為  $x^3 + 2x^2 - x + 3 = 0$  的三根，則  $(p^2 + 4)(q^2 + 4)(r^2 + 4)$  之值為何？  
 (A) 64 (B) 75 (C) 100 (D) 125 (E) 144

15. 將 12 枚代幣 (3 紅、2 白、1 藍、6 黑) 隨機分給 3 個遊戲玩家，每人分得 4 枚代幣。某個玩家獲得所有紅色代幣、另一位獲得所有白色代幣、最後一位獲得藍色代幣，這樣的機率可以寫成  $\frac{m}{n}$ ，其中  $m$  和  $n$  是互質的正整數。試問  $m+n$  之值為何？  
 (A) 387 (B) 388 (C) 389 (D) 390 (E) 391

16. 在一個  $5 \times 5$  的整數矩陣中，每個位置的數均稱為  $\bar{a}$ ，且每一列與每一行均依序形成一個有 5 項的等差數列。若位於第  $(5,5)$ 、 $(2,4)$ 、 $(4,3)$  和  $(3,1)$  的各元分別為 0、48、16 和 12，則位於第  $(1,2)$  的元為何？

$$\begin{bmatrix} \cdot & ? & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 48 & \cdot \\ 12 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 16 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

- (A) 19    (B) 24    (C) 29    (D) 34    (E) 39

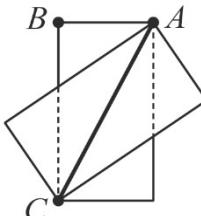
17. 圓內接四邊形  $ABCD$  中， $\overline{BC} = \overline{CD} = 3$ 、 $\overline{DA} = 5$  且  $\angle CDA = 120^\circ$ 。試問四邊形  $ABCD$  的較短對角線長度為何？

- (A)  $\frac{31}{7}$     (B)  $\frac{33}{7}$     (C) 5    (D)  $\frac{39}{7}$     (E)  $\frac{41}{7}$

18. 若整數  $a$ 、 $b$  和  $c$  滿足  $ab + c = 100$ 、 $bc + a = 87$  及  $ca + b = 60$ ，則  $ab + bc + ca$  之值為何？

- (A) 212    (B) 247    (C) 258    (D) 276    (E) 284

19. 在一張邊長為 1 和  $2 + \sqrt{3}$  的長方形卡片上，放一張一樣的卡片，使得它們有一條對角線重合（如下圖的  $\overline{AC}$ ）。



重複此動作，在第 2 張卡片上放第 3 張卡片，依順時鐘方向，同樣將此兩張卡片的對角線重合，以此類推。試問用了幾張卡片之後，第一次有卡片的一個頂點恰好落在圖中的 B 點？

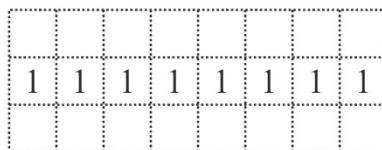
- (A) 6     (B) 8     (C) 10     (D) 12     (E) 不會有新頂點落在 B 點

20. 已知  $a_1 = 2$  且數列  $\langle a_n \rangle$  對於  $n \geq 2$  恒滿足遞迴關係  $\frac{a_n - 1}{n - 1} = \frac{a_{n-1} + 1}{(n-1) + 1}$ 。

試問小於或等於  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{100}^2$  的最大整數為何？

- (A) 338550     (B) 338551     (C) 338552  
 (D) 338553     (E) 338554

21. 下圖包含邊長為 1 吋的  $3 \times 8 = 24$  個虛線邊正方形。小卡用一些一吋長的牙籤放在某些正方形的邊上，形成一個不交叉的封閉曲線。下圖各格中的數字表示該正方形被牙籤覆蓋的邊數，沒有數字的正方形被牙籤覆蓋的邊數可以是任意的。試問小卡有多少種方法可以放置牙籤？



- (A) 130     (B) 144     (C) 146     (D) 162     (E) 196

22. 在正三角形  $ABC$  的邊  $\overline{AB}$  和  $\overline{AC}$  上分別隨機、獨立、均勻地選取點  $P$  和點  $Q$ 。試問  $\triangle APQ$  面積小於  $\triangle ABC$  面積一半的機率是在下面哪一個區間內？

- (A)  $\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$       (B)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$       (C)  $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$   
 (D)  $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$       (E)  $\left(\frac{7}{8}, 1\right]$

23. 試問

$$\tan^2 \frac{\pi}{16} \cdot \tan^2 \frac{3\pi}{16} + \tan^2 \frac{\pi}{16} \cdot \tan^2 \frac{5\pi}{16} + \tan^2 \frac{3\pi}{16} \cdot \tan^2 \frac{7\pi}{16} + \tan^2 \frac{5\pi}{16} \cdot \tan^2 \frac{7\pi}{16}$$

之值為何？

- (A) 28      (B) 68      (C) 70      (D) 72      (E) 84



24. 四個面兩兩全等的四面體稱為等面四面體。若等面四面體的每一個面都是整數邊長的不等邊三角形，則其表面積最小為多少？

- (A)  $\sqrt{3}$       (B)  $3\sqrt{15}$       (C) 15      (D)  $15\sqrt{7}$       (E)  $24\sqrt{6}$

25. 試問有多少組四元整數序列  $(a, b, c, d)$ ，滿足  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  的圖形對稱於直線  $y = x$ ，其中  $|a|, |b|, |c|, |d|$  均小於或等於 5，且  $c$  和  $d$  不全為 0？（一個圖形對稱於一條直線的意思是，將此圖形對此直線鏡射後圖形不變。）

- (A) 1282      (B) 1292      (C) 1310      (D) 1320      (E) 1330