第二十二屆 JHMC 國中數學競賽　團體賽

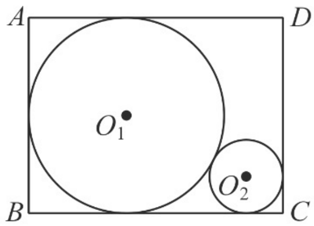
第 1~8 題每題 4 分。第 9、10 兩題必須寫出求解或證明過程，每題 8 分。總分共 48 分。

（註）本份試卷的所有圖形均為示意圖，僅供同學了解題意及解題參考。

1. 已知 $a+2b, 9, 2a+b$ 三數依序成等差數列，且 $2b, 6, 9a$ 成等比數列，則 $a^2+b^2=$ ______ 。

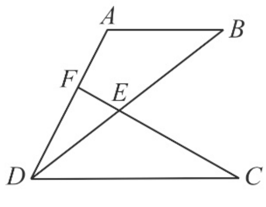
2. 方程式 $(x-1)(x^2+x-2)(x^2-5x+6)=12(x^2-4x+3)(x+2)$ 所有正整數解的總和為 ______ 。

3. 如圖，矩形 $ABCD$ 是張先生的一座庭園，其中 $\overline{AB}=16$ 公尺，$\overline{BC}=18$ 公尺。他想在庭園內闢建兩個圓型花圃，菊花花圃 O_1 和水仙花花圃 O_2，而圓 O_1 與矩形的三邊相切，圓 O_2 與圓 O_1 及矩形的兩邊相切。則圓 O_2 的半徑為 ______ 公尺。



4. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一個等差數列，其中 $a_2=17$，$a_5=38$。若在 a_{19} 與 a_{21} 之間插入 6 個數，使此 8 個數依序成為另一等差數列，則此插入的 6 個數之和為 ______ 。

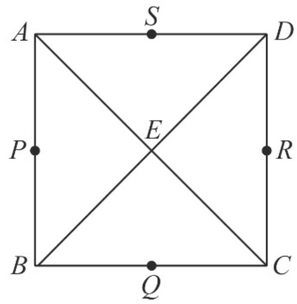
5. 如圖，$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，$\overline{AB}:\overline{CD}=2:3$ 且 $\overline{EB}:\overline{ED}=4:3$，則 $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EF}}$ 之值為 ______ 。



6. 在某偏遠地區僅設有一處基地台，其通訊服務範圍為距離該基地台不超過 5.2 公里的地方，超出此範圍手機便無訊號。南南由位置 A 往東行 9 公里到達 C，然後再往北行 4 公里到達基地台 D，基地台 D 北方 8 公里處有一秘境 B。若南南由 A 沿直線前行至 B，則有通訊服務路段的長度為 ______ 公里。

7. 若在 1 到 n 的正整數中，能被 3 整除且除以 7 餘 5 的所有數的總和為 1530，則 n 的最大值為 ______ 。

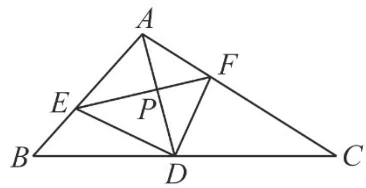
8. 如圖，正方形 $ABCD$ 的中心為點 E ，且 P,Q,R,S 四點在各邊上。已知這九個點上各標示 $1,2,3,\ldots,9$ 中某一數字，數字都不同，且滿足：「各邊上的 3 數之和及各對角線上的 3 數之和相加得到的總和為 83 」。頂點 A,B,C,D 上標示的數字總和最大可能之值為 ______ 。



9. (1) 設 a,b 均不為 0，試求 $\dfrac{3^5}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^5+1}+\dfrac{3^5}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^5+1}$ 之值。

(2) 試求 $\dfrac{3^5}{2^5+6^5}+\dfrac{3^5}{3^5+6^5}+\dfrac{3^5}{6^5+6^5}+\dfrac{3^5}{6^5+12^5}+\dfrac{3^5}{6^5+18^5}$ 之值。

10. 如圖，在 ΔABC 中，$\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的角平分線，點 E,F 分別在 $\overline{AB},\overline{AC}$ 上，使得 $\angle ADE=\angle B$ 且 $\angle ADF=\angle C$ ；並設 P 為 $\overline{AD}$ 與 $\overline{EF}$ 的交點。



(1) 試證：$\overline{AB}\times\overline{AE}=\overline{AC}\times\overline{AF}$ 。

(2) 已知 $\angle B-\angle C=10^\circ$，試求 $\angle DPF$ 的度數。