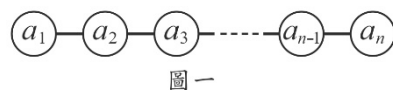


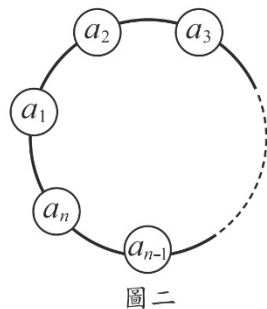
## 2025 TRML 思考賽

思考賽共 10 題，每題均為 6 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

如圖一，在  $n$  個點的路徑圖中，對每個  $i=1,2,\dots,n$ ，第  $i$  點標示一個 0 或 1 的數  $a_i$ ，稱為一個  $n$  字元的直線數串  $a_1a_2\cdots a_n$ 。如圖



二，在  $n$  個點的迴圈圖中，對每個  $i=1,2,\dots,n$ ，將第  $i$  點標示一個 0 或 1 的數  $a_i$ ，稱為一個  $n$  字元的環狀數串  $a_1a_2\cdots a_n$ ，其首尾兩個字元  $a_1, a_n$  視為相鄰，所以等同寫為  $a_2a_3\cdots a_na_1$  或  $a_3a_4\cdots a_na_1a_2$  等表示法。



在一個直線/環狀數串  $a_1a_2\cdots a_n$  中，將某一點的值  $a_i$  換成此點所有相鄰點的值之和，其他各點的值不變，我們稱這樣的變換為一次操作；

其中的加法的運算規則為： $1+1=0$ 、 $0+0=0$  而  $1+0=0+1=1$ 。例

如：圖一中若選取  $a_1$  而  $n\geq 2$ ，則將  $a_1$  換成  $a_2$ ；若選取  $a_2$  而  $n\geq 3$ ，則將  $a_2$  換成  $a_1+a_3$ ；若選取  $a_n$  而  $n\geq 2$ ，則將  $a_n$  換成  $a_{n-1}$ 。圖二中若選取  $a_1$  而  $n\geq 3$ ，則將  $a_1$  換成  $a_n+a_2$ 。

直線數串 11111 經過 5 次操作後，可變成各字元均為 0 的直線數串 00000，如下所示：

$$\overset{1}{1}1111 \xrightarrow{1} 10\overset{1}{1}11 \xrightarrow{2} 1\overset{1}{0}101 \xrightarrow{3} 00\overset{1}{1}01 \xrightarrow{4} 0000\overset{1}{1} \xrightarrow{5} 00000.$$

(其中上方有標記的數字就是進行操作的點)

這種經過某種有限次的操作後，可變成各字元均為 0 的數串稱為好數串。同樣的，環狀數串 11111 經過 7 次操作後，也可變成各字元均為 0 的數串，如下所示：

$$\overset{1}{1}1111 \xrightarrow{1} 10\overset{1}{1}11 \xrightarrow{2} 10\overset{1}{1}01 \xrightarrow{3} 1\overset{1}{0}001 \xrightarrow{4} \overset{1}{1}1001 \xrightarrow{5} 0\overset{1}{1}001 \xrightarrow{6} 0000\overset{1}{1} \xrightarrow{7} 00000$$

所以，環狀數串 11111 也是好數串。但 5 字元的直線數串 11011 就不是一個好數串，因為每次操作後數串都不變，故無法經過有限次的操作，將其變成各字元均為 0 的數串。類似地，6 字元的環狀數串 011011 無法經過有限次的操作，將其變成各字元均為 0 的數串，所以它也不是一個好數串。

試依序回答下列問題。

- (1) 試說明：每一個 3 字元的直線數串都是好數串。
- (2) 試說明：每一個 4 字元的環狀數串都是好數串。
- (3) 有一個 8 字元直線數串 11111111，小明將它操作兩次如下：

$$\overset{1}{1}1111111 \xrightarrow{1} 1101\overset{1}{1}111 \xrightarrow{2} 11011011,$$

發現繼續操作，數串都不會改變，因此，他推論原來的數串 11111111 不是好數串。試問：小明的推論是否正確？並請說明理由。

- (4) 試問：是否每一個 7 字元的**直線數串**都是好數串？並請說明理由。
- (5) 試問：是否每一個 8 字元的**環狀數串**都是好數串？並請說明理由。
- (6) 試利用數學歸納法證明：若  $a_1 = 0$  或  $a_n = 0$ ，則**直線數串**  $a_1a_2\cdots a_n$ 都是好數串。
- (7) 試證：若在**直線數串**  $a_1a_2\cdots a_n$  中，有某一個  $i$  使得連續 2 字元  $a_i a_{i+1} = 00$  或連續 3 字元  $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 010$  或  $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 111$ ，則**直線數串**  $a_1a_2\cdots a_n$ 都是好數串。
- (8) 試證：當  $n = 3k + 1 \geq 4$  ( $k$  為正整數) 時，每一個  $n$  字元的**直線數串**都是好數串。
- (9) 試證：當  $n = 3k + 2 \geq 2$  ( $k$  為非負整數) 時，恰有一個  $n$  字元的**直線數串**不是好數串。
- (10) 試問：當  $n = 3k \geq 3$  ( $k$  為正整數) 時，是否每一個  $n$  字元的**環狀數串**都是好數串？如果是，請證明；如果不是，請找出所有的非好數串，並請說明理由。

